

Chapitre II

***Commande adaptative floue des
systèmes d'ordre fractionnaire avec un
signe de gain connu et/ou inconnu***

CHAPITRE II

**Commande adaptative floue des systèmes d'ordre
fractionnaire avec un signe de gain connu et/ou inconnu.**

II.1. Introduction

Dans ce chapitre on constate les concepts de base liés à la commande adaptative floue où une loi de commande adaptative floue pour une classe de systèmes non linéaires d'ordre fractionnaire est proposée pour le problème de suivie de trajectoire.

On proposera deux commandes adaptatives floues, la première commande étudiée est développée pour une classe des systèmes SISO non linéaires d'ordre fractionnaire inconnus avec un signe de gain de commande connu. La seconde commande est développée pour une classe de systèmes SISO non linéaires d'ordre fractionnaire avec un signe de gain de commande inconnu, pour estimer ce signe de gain de commande on utilise la fonction de Nussbaum d'ordre fractionnaire.

II.2. Commande adaptative floue des systèmes d'ordre fractionnaire avec un signe de gain connu :

II.2.1. Position du problème

Considérons le système dynamique non linéaire mono-entrée mono-sortie décrit par les équations différentielles suivantes [16] :

$$\begin{cases} \dot{x}^{(nq)} = f(x, t) + g(x, t)u + d(t) \\ y = x_1 \end{cases} \quad (2.1)$$

Où $x = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T = [x, x^{(q)}, x^{(2q)}, \dots, x^{((n-1)q)}]^T$ est le vecteur d'état de ce système, $u \in R$ est l'entrée de commande du système, $y \in R$ est sa sortie, $f(x, t)$ et $g(x, t)$ sont des fonctions non linéaires continues inconnues, $d(t)$ présente la perturbation externe.

L'objectif est déterminé une loi de commande forçant la sortie du système à suivre la trajectoire de référence y_d tout en assurant la bornitude de tous les signaux du système en boucle fermée.

Les hypothèses suivantes sont considérées. [4], [15] et [17]

Hypothèse 2.1 : Le vecteur d'état x est non mesurable, excepté la sortie du système y .

Hypothèse 2.2 : La trajectoire de référence $y_d(t)$ et ses dérivées jusqu'à l'ordre (nq) sont connues, continues et bornées.

Hypothèse 2.3 : Le gain de commande $g(x, t)$ est non nul et de signe connu. Ainsi, il est strictement positif ou strictement négatif.

Hypothèse 2.4 : La perturbation externe est bornée $|d(t)| \leq D$ avec D est une constante positive inconnue.

Si nous supposons que $d(t) = 0$ et les fonctions $f(x)$ et $g(x)$ sont connues,

Les objectifs de commande peuvent être atteints en choisissant la commande idéale suivante:

$$u^* = \frac{1}{g(x, t)} [-f(x, t) + \dot{y}_d^{(nq)} + k^T e] \quad (2.2)$$

$$\text{Où } y_d = [y_d, y_d^{(q)}, \dots, y_d^{((n-1)q)}]^T \in R^n,$$

$e = y_d - y = [e, e^{(q)}, \dots, e^{((n-1)q)}]^T \in R^n, e^{(iq)} = y_d^{(iq)} - y^{(iq)}$ est le vecteur des erreurs de poursuite.

$$e^{(nq)} + k_1 e^{((n-1)q)} + \dots + k_n e = 0 \quad (2.3)$$

- Ce qui donne $\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0$, qui est l'objectif principal de la commande.

$K = [k_1, k_2, \dots, k_n]^T \in R^n$, un vecteur est choisi par la polynôme caractéristique $(A - BK^T)$ (Système stable).

Nous avons supposé que la perturbation externe est non nulle ($d(t) \neq 0$), et les fonctions $f(x, t)$ et $g(x, t)$ inconnues. De ce fait, l'implantation de la commande idéale (2.1) est difficile et voire impossible. Donc notre but est d'approcher cette commande idéale par un système flou.

On remplace $f(x, t)$ et $g(x, t)$ par les systèmes flous $f(x, \theta_f)$ et $g(x, \theta_g)$ spécifiés comme :

$$\begin{aligned} f(x, \theta_f) &= \theta_f^T \xi(x) \\ g(x, \theta_g) &= \theta_g^T \xi(x) \end{aligned} \quad (2.4)$$

$\xi(x)$ est un vecteur de fonctions floues de base supposé convenablement fixé en avance par l'utilisateur, θ_f et θ_g sont les vecteurs de paramètres ajustés par des lois d'adaptation sur la base d'un critère de stabilité de Lyapunov.

En fonction de la connaissance du système et la connaissance de commande, La commande adaptative peut être construite en intégrant à la fois la description floue et des règles de commande floue.

$$u_c = \frac{1}{g(x, \theta_g)} (-f(x, \theta_f) + y_d^{(nq)} + k^T e) \quad (2.5)$$

$$e^{(nq)} = -k^T e + ([f(x, \theta_f) - f(x, t)] + [g(x, \theta_g) - g(x, t)]u_c) \quad (2.6)$$

qui est équivalente à,

$$e^{(nq)} = Ae + B([f(x, \theta_f) - f(x, t)] + [g(x, \theta_g) - g(x, t)]u_c) \quad (2.7)$$

$$\text{Où, } A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -k_1 & -k_2 & -k_3 & -k_4 & \dots & -k_{(n-1)} & -k_n \end{bmatrix} \quad \text{et } B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

Il existe une matrice unique symétrique définie positive qui satisfait l'équation de Lyapunov suivante :

$$A^T P + PA = -Q \quad (2.9)$$

où Q est une matrice symétrique arbitraire définie positive, Soit la fonction de Lyapunov suivante :

$$V_e = \frac{1}{2} e^T P e \quad (2.10)$$

La dérivée de la fonction de Lyapunov (2.10) est :

$$V_e^{(q)} = \frac{1}{2} (e^{(q)})^T P e + \frac{1}{2} e^T P e^{(q)} \quad (2.11)$$

En utilisant (2.7) et (2.9) dans (2.11)

$$V_e^{(q)} = -\frac{1}{2} (e)^T Q e + e^T P B ([f(x, \theta_f) - f(x, t)] + [g(x, \theta_g) - g(x, t)]u_c) \quad (2.12)$$

Pour que $y^{(iq)} = y_d^{((i-1)q)} - e^{((i-1)q)}$ soit borné, V_e doit être limité, ce qui signifie que $V_e^{(q)} \leq 0$ lorsque V_e est supérieur à une constante $\bar{V}$.

Utilisant (2.7) et (2.9) dans (2.11), il est obtenu que

$$V_e^{(q)} = -\frac{1}{2}(e)^T Q e + e^T P B ([f(x, \theta_f) - f(x, t)] + [g(x, \theta_g) - g(x, t)] u_c) \quad (2.13)$$

$$\leq -\frac{1}{2}(e)^T Q e + |e^T P B| (|f(x, \theta_f)| - |f(x, t)| + |g(x, \theta_g)| - |g(x, t)|) u_c$$

Alors, en utilisant la commande u_c donnée en (2.5), $V_e \leq \bar{V} < \infty$ est vérifiée (garanti). Puisque P est définie positive, la bornitude de V_e implique la bornitude de e qui à son tour implique que $y^{(iq)}$ est borné.

L'étape suivante, comprend à développer une loi d'adaptation pour ajuster les paramètres θ_f et θ_g dans le but de cette section est de forcer l'erreur de poursuite de converger vers zéro.

Les vecteurs des paramètres optimaux θ_f^* et θ_g^* sont définis par :

$$\underline{\theta}_f^* = \arg \min_{\underline{\theta}_f \in \Omega_f} [\sup_{x \in \Omega_x} |f(\underline{x} | \underline{\theta}_f) - f(\underline{x}, t)|] \quad (2.14)$$

$$\underline{\theta}_g^* = \arg \min_{\underline{\theta}_g \in \Omega_g} [\sup_{x \in \Omega_x} |g(\underline{x} | \underline{\theta}_g) - g(\underline{x}, t)|] \quad (2.15)$$

où Ω_f, Ω_g et Ω_x sont des ensembles de contraintes pour θ_f, θ_g et x respectivement et elles sont définies comme

$$\begin{aligned} \Omega_f &= \{\theta_f \mid \theta_f \leq M_f\} \\ \Omega_g &= \{\theta_g \mid \theta_g \leq M_g\} \\ \Omega_x &= \{x \mid x \leq M_x\} \end{aligned}$$

où M_f, M_g et M_x sont des constantes positives.

En utilisant (2.15), (2.16), l'équation dynamique de l'erreur (2.13) peut être réécrite comme,

$$\dot{e}^{(q)} = A e + B \left[[f(x, \theta_f) - f(x, \theta_f^*)] + [g(x, \theta_g) - g(x, \theta_g^*)] u_c + \omega \right] \quad (2.16)$$

les erreurs minimales d'approximation sont définies comme,

$$\omega = \left[(f(x, \theta_f^*) - f(x, t)) + (g(x, \theta_g^*) - g(x, t)) u_c \right] \quad (2.17)$$

Si $f(x, \theta_f)$ et $g(x, \theta_g)$ sont remplacés par (2.4), (2.16) peut être réécrite de la façon suivante:

$$\dot{e}^{(q)} = A e + B \omega + [\phi_f^T \xi(x) + \phi_g^T \xi(x) u_c] \quad (2.18)$$

Avec $\phi_f = \theta_f - \theta_f^*$, $\phi_g = \theta_g - \theta_g^*$ et $\xi(x)$ est le vecteur des fonctions floues de base.

II.2.2. Analyse de la stabilité

Soit la fonction candidate de Lyapunov suivante :

$$V_e = \frac{1}{2} e^T P e + \frac{1}{2r_1} \phi_f^T \phi_f + \frac{1}{2r_2} \phi_g^T \phi_g \quad (2.19)$$

où, r_1 et r_2 sont des constantes positives.

$$\begin{aligned} V_e^{(q)} = & -\frac{1}{2} (e)^T Q e + e^T P B \omega + \frac{1}{r_1} \phi_f^T \left(\theta_f^{(q)} + r_1 e^T P B \xi(x) \right) \\ & + \frac{1}{r_2} \phi_g^T \left(\theta_g^{(q)} + r_2 e^T P B \xi(x) u_c \right) \end{aligned} \quad (2.20)$$

Où $\phi_f^{(q)} = \theta_f^{(q)}$, $\phi_g^{(q)} = \theta_g^{(q)}$.

Les lois d'adaptation sont choisies comme suite :

$$\theta_f^{(q)} = -r_1 e^T P B \xi(x) \quad (2.21)$$

$$\theta_g^{(q)} = -r_2 e^T P B \xi(x) u_c \quad (2.22)$$

De (2.21) il est obtenu que,

$$V_e^{(q)} \leq -\frac{1}{2} (e)^T Q e + e^T P B \omega \quad (2.23)$$

Le terme $e^T P B \omega$ est d'ordre de l'erreur d'approximation minimale.

Puisque les systèmes flous sont des approximations universelles, ω autrement égale à zéro. Ce qui admet de conclure que la loi de commande assemblée affirme la stabilité du système au sens de Lyapunov $V_e^{(q)} \leq 0$.

Le problème final est de connaissance comment forcer θ_f et θ_g dans les ensembles Si $\theta_f \in \Omega_f$ et $\theta_g \in \Omega_g$ sont conservés, alors u_c (2.5) sera bornée parce que dans ce cas $f(x, \theta_f)$ est bornée et $g(x, \theta_g) > 0$.

Les lois d'adaptation modifiées sont données comme suit :

pour ajuster le vecteur de paramètres θ_f :

$$\theta_f^{(q)} = \begin{cases} -r_1 \xi(x) B^T P e, & \text{si } |\theta_f| < M_f \\ & \text{ou } (|\theta_f| = M_f \text{ et } e^T P B \xi^T(x) \theta_f \geq 0) \\ P_f [-r_1 \xi(x) B^T P e], & \text{si } |\theta_f| = M_f \text{ et } e^T P B \xi^T(x) \theta_f < 0 \end{cases} \quad (2.24)$$

Pour ajuster le vecteur de paramètres θ_g :

$$\theta_g^{(q)} = \begin{cases} -r_2 \xi(x) B^T P e u, & \text{si } |\theta_g| < M_g \\ & \text{ou } (|\theta_g| = M_g \text{ et } e^T P B \xi^T(x) \theta_g u \geq 0) \\ P_g [-r_2 \xi(x) B^T P e u], & \text{si } |\theta_g| = M_g \text{ et } e^T P B \xi^T(x) \theta_g u < 0 \end{cases} \quad (2.25)$$

Le schéma de la commande proposée est donné dans la figure (II.1) :

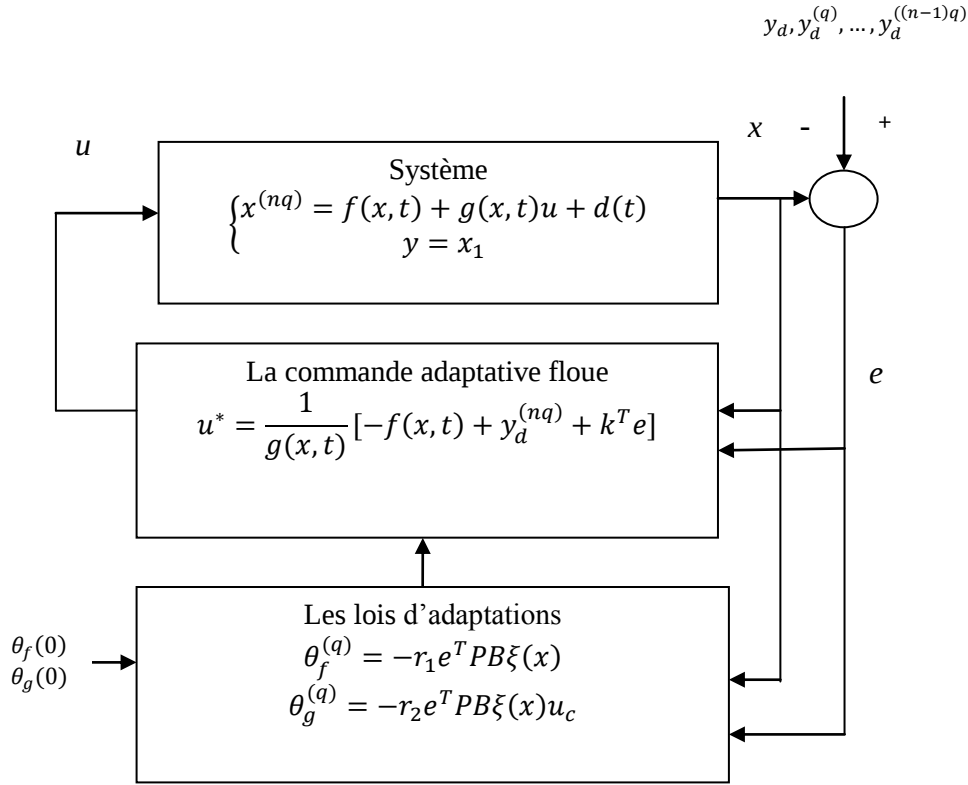


Fig. II.1 : Schéma général de commande adaptative floue avec signe de gain de commande connu.

II.2.3. Résultats de simulation

A). Exemple.1

Pour illustrer les performances de cette approche de commande proposée, on considère deux systèmes chaotiques d'ordre fractionnaire de *Duffing* comme suit, [18]

Le premier est un système de référence

$$D^q y_1 = y_2$$

$$D^q y_2 = y_1 - 0.25y_2 - y_1^3 + 0.3 \cos(t)$$

Le second est le système réponse (de commande)

$$D^q x_1 = x_2$$

$$D^q x_2 = x_1 - 0.3x_2 - x_1^3 + 0.35 \cos(t) + u(t) + d(t)$$

Les conditions initiales sont choisies comme suit $\underline{y}(0) = [0, 0]^T$ et $\underline{x}(0) = [0.2, -0.2]^T$ respectivement. On considère dans ce cas l'ordre fractionnaire $q = 0.95$, où la perturbation externe $d(t) = 0.1\sin(t)$.

Pour les autres constantes de conception sont fixées comme suit $k_1 = k_2 = 1$, $r_1 = 100$, $r_2 = 40$, $\rho = 0.05$, $h = 0.01$ et $T_{sim} = 40s$.

L'objectif principal est de commander notre système de réponse pour suivre le système de référence. Avec les fonctions $f(x, t)$ et $g(x, t)$ sont totalement inconnues.

La figure (II.2) illustre la synchronisation des systèmes de Duffing sans la commande proposée.

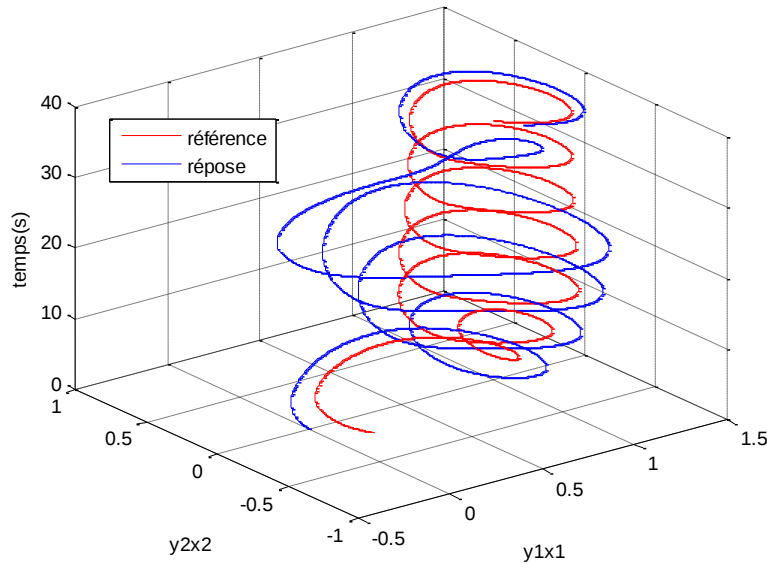


Fig. II.2 : Plan de phase des systèmes sans commande.

Chacune des fonctions $f(\underline{x}, t)$ et $g(\underline{x}, t)$ est représentée par un système flou, et chaque système flou a comme entrée x_1 et x_2 . le système flou est utilisé avec les entrées x_1 et x_2 car la forme de la fonction est inconnue. Pour chaque variable d'entrée, on définit sept fonctions d'appartenance de type gaussienne comme suit [18] :

$$\mu_{F_i^l}(x_i) = \exp \left[-0.5 \left(\frac{x_i - \bar{x}}{0.8} \right)^2 \right], i = 1, 2 \text{ et } = 1, \dots, 7.$$

On applique la loi de commande globale (2.6) comme suit

$$u = \frac{1}{\xi^T(x)\theta_g} \left[-\xi^T(x)\theta_f + y_d^{(nq)} + k^T e \right]$$

La figure (II.3) illustre la synchronisation des systèmes de Duffing avec la commande proposée.

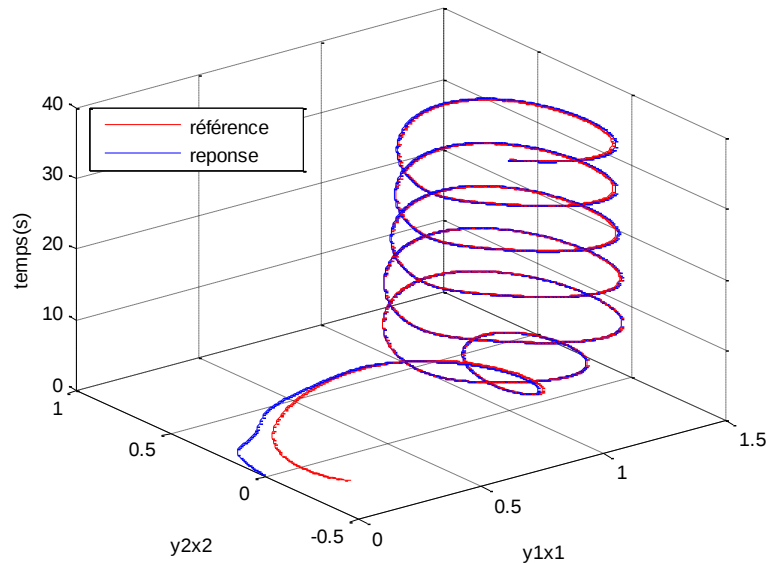
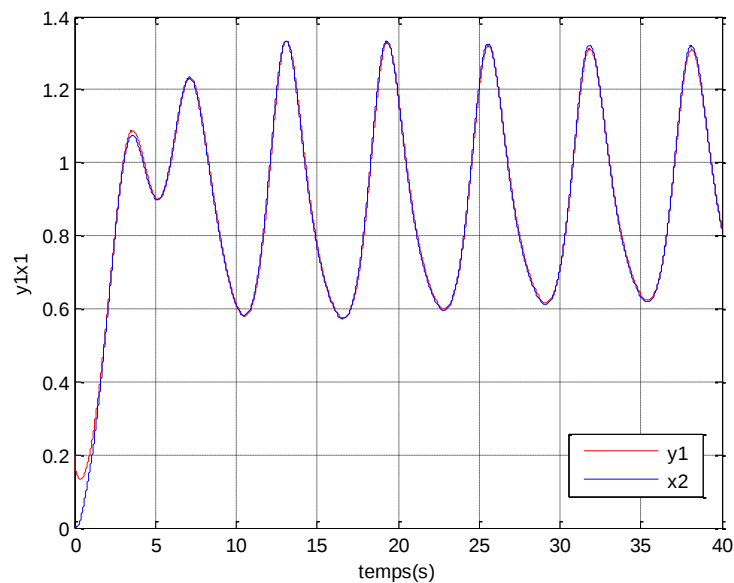
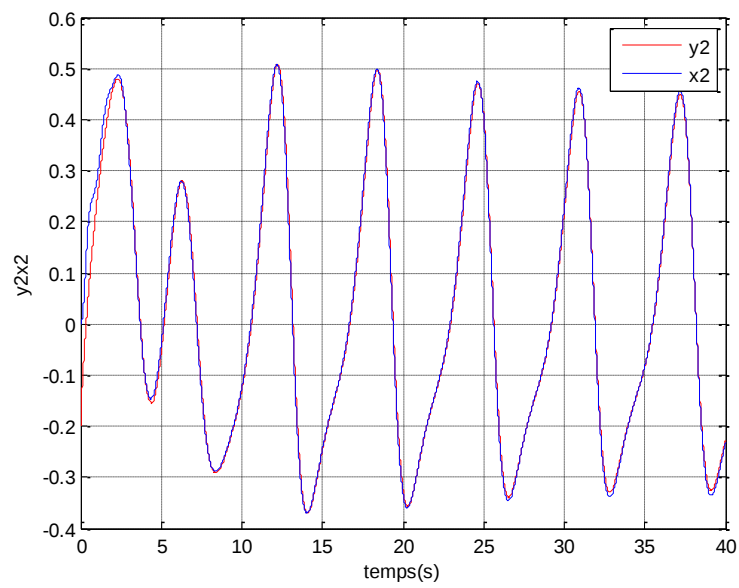


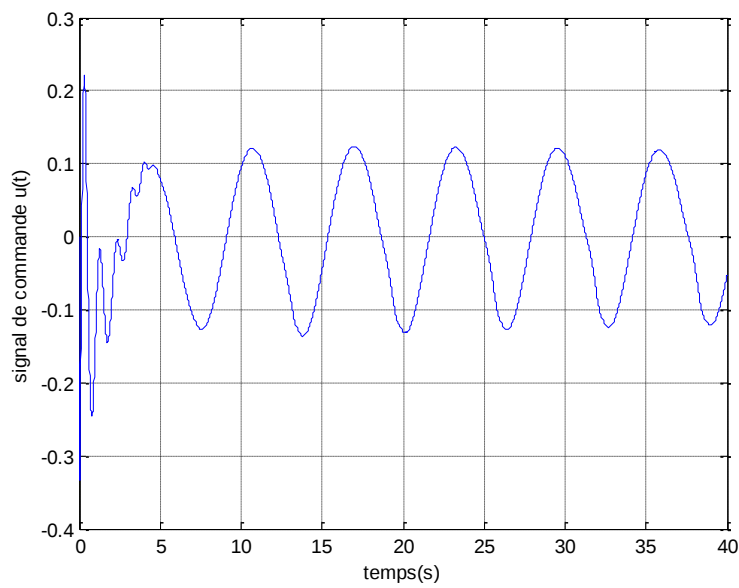
Fig. II.3 : Synchronisation des systèmes avec la loi de commande étudiée.



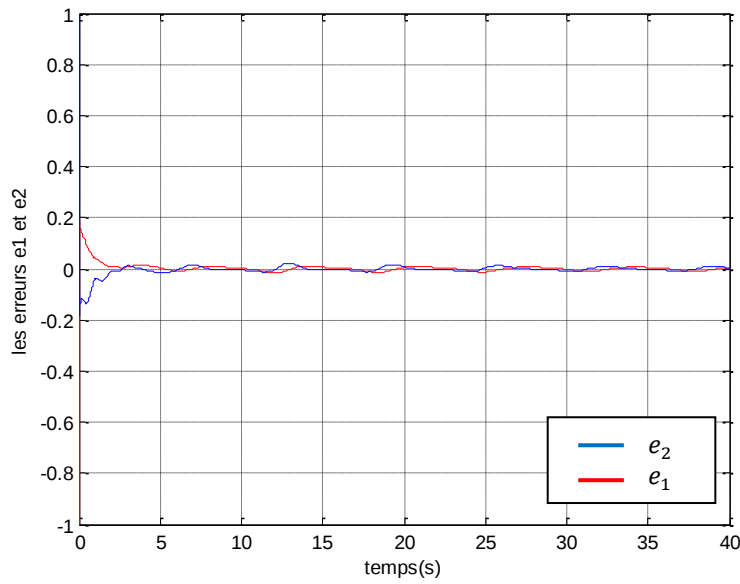
(a). Trajectoires des états x_1 et y_1



(b). Trajectoires des états x_2 et y_2



(c). Signal de commande $u(t)$



(d). erreur $e_1(t)$ et $e_2(t)$

Fig. II.4 : Résultats de simulation avec la loi de commande étudiée.

B). Exemple.2

Pour illustrer les performances de cette approche de commande proposée, on considère deux systèmes chaotiques d'ordre fractionnaire de *Duffing* comme suit, [19]
Le premier est un système de référence

$$D^q y_1 = y_2$$

$$D^q y_2 = 1.2y_1 - y_2 - y_1^2 + 0.5 \cos(t)$$

Le second est le système réponse (de commande)

$$D^q x_1 = x_2$$

$$D^q x_2 = x_1 - 1.8x_2 - x_1^2 + 0.9 \cos(t) + u(t) + d(t)$$

Les conditions initiales sont choisies comme suit $\underline{y}(0) = [0, 0]^T$ et $\underline{x}(0) = [1, -1]^T$ respectivement. On considère dans ce cas l'ordre fractionnaire $q = 0.98$, où la perturbation externe $d(t) = 0.1 \sin(t)$. Pour les autres constantes de conception sont fixées comme suit $k_1 = k_2 = 1$, $r_1 = 200$, $r_2 = 40$, $\rho = 0.05$, $h = 0.01$ et $T_{sim} = 40s$.

L'objectif principal est de commander notre système de réponse pour suivre le système de référence. Avec les fonctions $f(x, t)$ et $g(x, t)$ sont totalement inconnues.

La figure (II.5) illustre le plan de phase des systèmes chaotiques de Duffing sans la loi de commande.

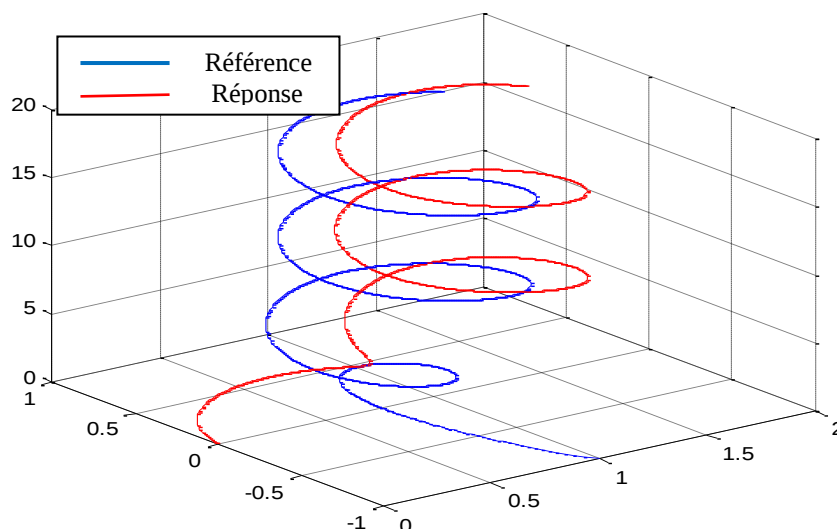


Fig. II.5 : Plan de phase des systèmes sans la loi de commande.

Chacune des fonctions $f(\underline{x}, t)$ et $g(\underline{x}, t)$ est représentée par un système flou, et chaque système flou a comme entrée x_1 et x_2 . Le système flou est utilisé avec les entrées x_1 et x_2 car la forme de la fonction est inconnue. Pour chaque variable d'entrée, on définit sept fonctions d'appartenance de type gaussienne comme suit [19]:

$$\mu_{F_i^l}(x_i) = \exp \left[-0.5 \left(\frac{x_i - \bar{x}}{0.8} \right)^2 \right], i = 1, 2 \text{ et } = 1, \dots, 7.$$

On applique la loi de commande globale (2.6) comme suit

$$u = \frac{1}{\xi^T(x)\theta_g} \left[-\xi^T(x)\theta_f + y_d^{(nq)} + k^T e \right]$$

La figure (II.6) illustre la synchronisation des systèmes Duffing avec la commande proposée.

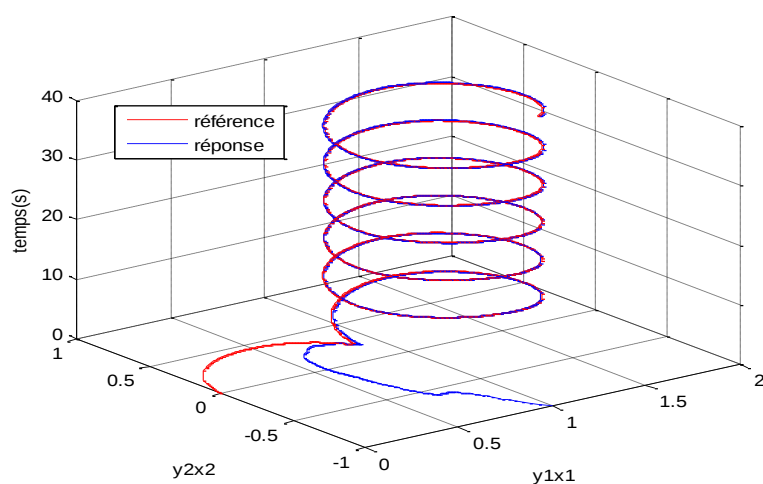
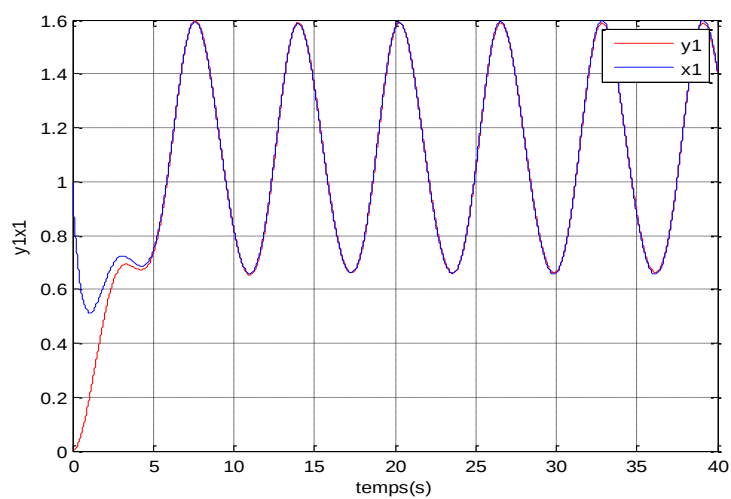
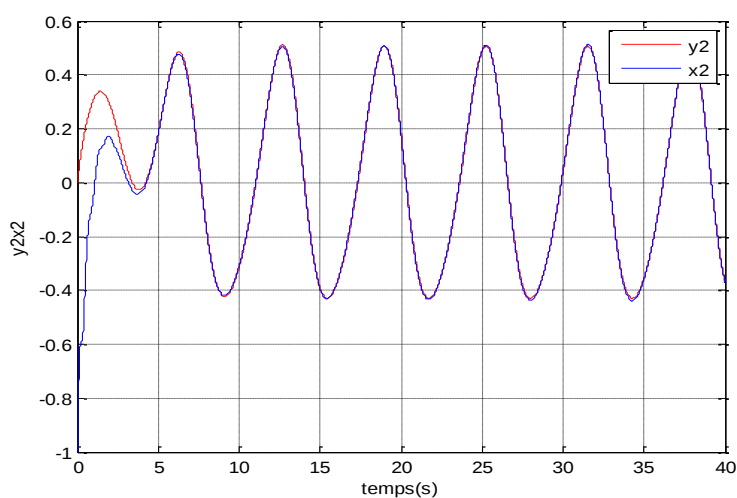


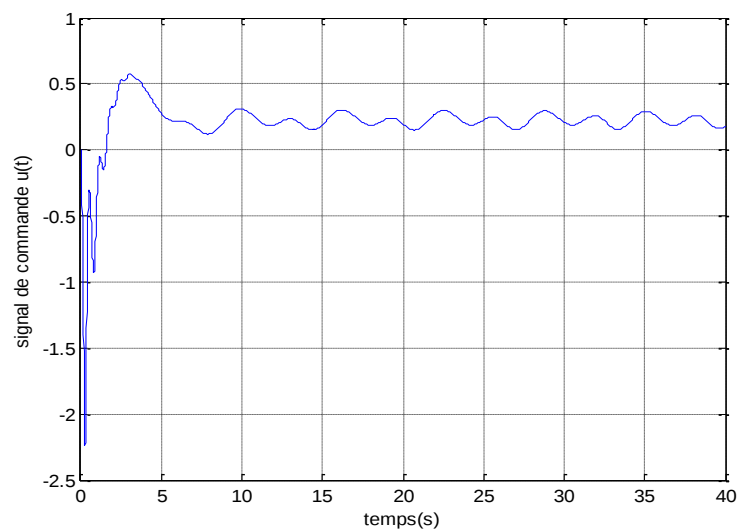
Fig. II.6 : Synchronisation des systèmes avec la loi de commande.



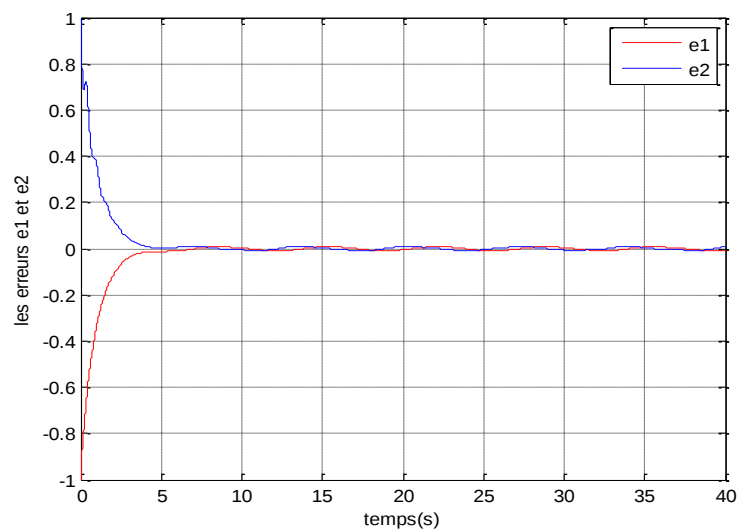
(a). Trajectoires des états x_1 et y_1



(b). Trajectoires des états x_2 et y_2



(c). Signal de commande $u(t)$



(d). Erreurs $e_1(t)$ et $e_2(t)$

Fig. II.7 : Résultats de simulation des systèmes de Duffing fractionnaire.

On peut conclure dans les deux exemples, d'après les figures (a) et (b) que la sortie du système $y(t)$ suit sa référence $x(t)$, en présence de la perturbation, où les erreurs de poursuite convergent vers zéro, et le signal de la commande globale à une forme lisse malgré la présence de perturbations externes.

II.3. Commande adaptative floue des systèmes d'ordre fractionnaire avec un signe de gain inconnu (l'utilisation de la fonction de Nussbaum) :

II.3.1. Position du problème

Considérons le système dynamique affine non linéaire SISO décrit par les équations différentielles de la forme (2.26),

$$\begin{cases} \dot{x}^{(nq)} = f(x_1, x_2, \dots, x_n) + g(x_1, x_2, \dots, x_n)u + d(t) \\ y = x_1 \end{cases} \quad (2.26)$$

Où $x = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T = [x, x^{(q)}, x^{(2q)}, \dots, x^{((n-1)q)}]^T$ est le vecteur d'état de ce système, $u \in R$ est l'entrée de commande du système, $y \in R$ est sa sortie, f et g sont des fonctions non linéaires continues inconnues, $d(t)$ présente la perturbation externe.

L'objectif de la commande consiste à synthétiser une loi de commande pour le système (2.26) assurant la bornitude de tous les signaux du système bouclé et la poursuite pour la sortie $y(t)$ d'une trajectoire de référence $y_r(t)$.

Les hypothèses suivantes sont considérées. [4], [15] et [17]

Hypothèse 2.1 : Le vecteur d'état x est non mesurable, excepté la sortie du système y .

Hypothèse 2.2 : La trajectoire de référence $y_d(t)$ et ses dérivées jusqu'à l'ordre (nq) sont connues, continues et bornées.

Hypothèse 2.3 : Le gain de commande $g(x, t)$ est non nul et de signe inconnu.

Hypothèse 2.4 : La perturbation externe est bornée : $|d(t)| \leq D$ avec D est une constante positive inconnue.

De l'hypothèse 2.3, et contrairement à la commande précédente, le signe de $g(x)$ ne nécessite pas d'être connue, par l'utilisation de la technique de Nussbaum, introduite dans le chapitre 1, et qui estime le signe de gain de commande. Par la suite de ce chapitre, la fonction Nussbaum $N_1(\zeta) = \zeta^2 \cos(\zeta)$, sera employée pour commander les systèmes non linéaires.

Le système (2.25) peut être représenté sous la forme d'espace d'état comme suit:

$$\begin{cases} \dot{x}^{(nq)} = Ax + B[f(x) + g(x)u], \\ y = c^T x \end{cases} \quad (2.27)$$

Où

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -k_1 & -k_2 & -k_3 & -k_4 & \dots & -k_{(n-1)} & -k_n \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad c = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Si nous supposons que $d(t) = 0$ et les fonctions $f(x)$ et $g(x)$ sont connues, Les objectifs de commande peuvent être atteints en choisissant la commande idéale suivante :

$$u^* = \frac{1}{g(x,t)} [-f(x,t) + y_d^{(nq)} + k^T e] \quad (2.28)$$

Où $y_d = [y_d, y_d^{(q)}, \dots, y_d^{((n-1)q)}]^T \in R^n$,
 $e = y_d - y = [e, e^{(q)}, \dots, e^{((n-1)q)}]^T \in R^n$, $e^{(iq)} = y_d^{(iq)} - y^{(iq)}$ est le vecteur des erreurs de poursuite.

$$e^{(nq)} + k_1 e^{((n-1)q)} + \dots + k_n e = 0 \quad (2.29)$$

Par conséquent $\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0$,

$K = [k_1, k_2, \dots, k_n]^T \in R^n$ vecteur choisir par la polynôme caractéristique $(A - BK^T)$ (Système stable).

En utilisant le fait que $y_d^{(q)} = Ay_d + By_d^{(nq)}$, l'équation suivante est obtenue:

$$\begin{cases} e^{(q)} = Ae + B[f(x) + g(x)u^* - y_d^{(nq)}], \\ e = C^T e, \end{cases} \quad (2.30)$$

Cependant, la perturbation externe est non nulle ($d(t) \neq 0$), et les fonctions f et g inconnues, de sorte que la commande idéale u^* ne peut pas être mis en œuvre. Ce problème a été résolu par la stratégie de commande proposée précédemment, par l'utilisation des systèmes flous pour approximer les fonctions inconnues.

Dans ce qui suit, une commande adaptative floue sera conçue pour stabiliser le système (2.26) ou un système équivalent (2.30).

On remplace f par les systèmes flous $f(x, \theta_f)$ et spécifiés comme :

$$f(x, \theta_f) = \theta_f^T \xi(x) \quad (2.31)$$

$\xi(x)$ est un vecteur de fonctions floues, θ_f est le vecteur des paramètres ajustés par des lois d'adaptation.

En utilisant (2.31), (2.32) peut être réécrite comme suite :

$$\begin{cases} e^{(q)} = Ae + B[\xi^T(x)\theta_f + g(x)u^* - y_d^{(nq)}], \\ e = C^T e, \end{cases} \quad (2.32)$$

Les vecteurs des paramètres optimaux θ_f^* est défini par :

$$\theta_f^* = \arg \min_{\theta_f \in \Omega_f} [\sup_{x \in \Omega_x} |f(x|\theta_f) - f(x)|] \quad (2.33)$$

Où θ_f^* est un paramètre optimal repuis satisfaire un objectif analytique, avec $\phi_f = \theta_f - \theta_f^*$, et Ω_f et Ω_x sont des ensembles de contraintes pour θ_f , et x respectivement et elles sont définies comme

$$\Omega_f = \{\theta_f \parallel \theta_f \mid \leq M_f\} \quad (2.34)$$

$$\Omega_x = \{x \parallel x \mid M_x\} \quad (2.35)$$

Où M_f et M_x sont des constantes positives.

Le théorème suivant est proposé pour montrer les performances de contrôle dans le système en boucle fermée. [15]

La commande adaptative floue est Construite par :

$$u^* = N(\zeta) [k^T e + \theta^T \xi(x) - y_d^{(nq)}] \quad (2.36)$$

$$\zeta^{(q)} = e^T P B [k^T e + r_1 \theta^T \xi(x) - y_d^{(nq)}] \quad (2.37)$$

et la loi d'adaptation θ est choisie comme suite :

$$\theta^{(q)} = -r_1 \theta + r_1 e^T P B \xi(x) \quad (2.38)$$

Où $P = P^T > 0$ est des matrices définies positives, il existe une matrice symétrique définie positive $Q = Q^T$ satisfaisant à l'équation de Lyapunov suivant:

$$A_c P + P A_c^T + P B B^T P = -Q$$

On choisissons $A_c = A - B K^T$ est Hurwitz. Alors, tous les signaux dans le système en boucle fermée sont bornés, et l'erreur de poursuite converge vers un ensemble compact borné défini par $\Omega = \{e_1, |e_1| \leq a_1\}$. Où a_1 est un constant positif.

II.3.2. Analyse de stabilité

La fonction de Lyapunov est choisie comme

$$V = \frac{1}{2} e^T P e + \frac{1}{2r_1} (\phi_f^T) (\phi_f). \quad (2.39)$$

La dérivée de (2.39) par rapport au temps, nous obtenons [19]

$$V^{(q)}(t) = \frac{1}{2} (e^{(q)})^T P e + \frac{1}{2} e^T(t) P e^{(q)}(t) + \frac{1}{r_1} (\phi_f^T) (\phi_f^{(q)}) \quad (2.40)$$

En remplaçant (2.32) dans l'équation (2.40)

$$V^{(q)}(t) = \frac{1}{2} e^T (P A + A^T P) e + \frac{1}{r_1} (\phi_f^T) (\phi_f^{(q)}) + e^T P B [\xi(x) \theta_f^T + g u^* - y_d^{(nq)}] \quad (2.41)$$

Avec (2.36) et (2.37), (2.42) devient

$$\begin{aligned} V^{(q)}(t) &= \frac{1}{2} e^T (P A + A^T P) e + \frac{1}{r_1} (\phi_f^T) (\phi_f^{(q)}) + e^T P B [\xi(x) \theta_f^T + g u^* - y_d^{(nq)}] \\ &\quad - e^T P B \theta_f^T \xi(x). \\ &= \frac{1}{2} e^T (P A + A^T P) e + \phi_f^T \left[\frac{1}{r_1} \phi_f^{(q)} - e^T P B \xi(x) \right] + e^T P B [\xi(x) \theta_f^T - y_d^{(nq)}] \\ &\quad + e^T P B g N(\zeta) (k^T e + \xi(x) \theta_f^T - y_d^{(nq)}). \\ &= \frac{1}{2} e^T (P A_c + A_c^T P) e + \phi_f^T \left[\frac{1}{r_1} \phi_f^{(q)} - e^T P B \xi(x) \right] + [g N(\zeta) + 1] \zeta^{(q)}. \end{aligned} \quad (2.42)$$

En utilisant (2.38), l'inégalité suivante est obtenue

$$\begin{aligned} \phi_f^T \left[\frac{1}{r_1} \phi_f^{(q)} - e^T P B \xi(x) \right] &= -\phi_f^T \theta = -\phi_f^T \phi_f - \phi_f^T \theta_f^* \\ &\leq -\frac{1}{2} \phi_f^T \phi_f + \frac{1}{2} \|\theta_f^*\|^2. \end{aligned} \quad (2.43)$$

De l'inégalité de [19]

$$e^T P B \leq \frac{1}{2} e^T P B B^T P e + \frac{1}{2} b^2. \quad (2.44)$$

En substituant (2.43) et (2.44) dans (2.42), l'inégalité suivante est obtenu

$$V^{(q)} \leq \frac{1}{2}e^T(PA_c + A_c^TP)e + \frac{1}{2}e^TPBB^TPe + \frac{1}{2}b^2 - \frac{1}{2}\phi_f^T\phi_f + \frac{1}{2}\|\theta_f^*\|^2 + [gN(\zeta) + 1]\zeta^{(q)} \leq -\frac{1}{2}e^TQe + \frac{1}{2}b^2 - \frac{1}{2}\phi_f^T\phi_f + \frac{1}{2}\|\theta_f^*\|^2 + [gN(\zeta) + 1]\zeta^{(q)}. \quad (2.45)$$

Soit $\mu = \lambda_{\min}(QP^{-1}, r_1)$ et $\beta = \frac{1}{2}\|\theta_f^*\|^2 + \frac{1}{2}b^2$.

L'inégalité (2.45) peut être exprimée comme,

$$V^{(q)} \leq -\mu V + \beta + [gN(\zeta) + 1]\zeta^{(q)}. \quad (2.46)$$

En multipliant les deux cotés par $e^{\mu t}$, (2.46) réécrite comme suit,

$$V^{(q)}e^{\mu t} + \mu V e^{\mu t} \leq \beta e^{\mu t} + e^{\mu t}[gN(\zeta) + 1]\zeta^{(q)}$$

$$\frac{d}{dt}(V(t)e^{\mu t}) \leq \beta e^{\mu t} + e^{\mu t}[gN(\zeta) + 1]\zeta^{(q)}. \quad (2.47)$$

Avec l'intégration de (2.47) sur $[0, t]$, il résulte que

$$0 \leq V(t)e^{\mu t} - V(0) \leq \frac{\beta}{\mu}e^{\mu t} - \frac{\beta}{\mu} + \int_0^t [gN(\zeta) + 1]e^{\mu \tau} \zeta^{(q)} d\tau$$

$$0 \leq V(t) \leq \frac{\beta}{\mu} + \left[V(0) - \frac{\beta}{\mu}\right]e^{-\mu t} + e^{-\mu t} \int_0^t [gN(\zeta) + 1]e^{\mu \tau} \zeta^{(q)} d\tau. \quad (2.48)$$

Notant que $0 < e^{\mu t} < 1$ et $\frac{\beta}{\mu}e^{\mu t} > 1$, alors, $\left[V(0) - \frac{\beta}{\mu}\right]e^{-\mu t} \leq V(0)$.

L'équation (2.48) devient,

$$0 \leq V(t) \leq \beta^* + e^{-\mu t} \int_0^t [gN(\zeta) + 1]e^{\mu \tau} \zeta^{(q)} d\tau. \quad (2.49)$$

Ou $\beta^* = \frac{\beta}{\mu} + V(0)$.

D'après le Lemme 1 (section 1.8.4), il peut être conclu de (2.46) que $V(t)$, $\zeta(t)$ et $\int_0^t gN(\zeta)\zeta d\tau$ sont bornées, c.-à-d. e et θ_f sont aussi bornées. De (2.36), u est bornée. Alors, tous les signaux dans le système en boucle fermée sont bornés.

Le schéma de la commande proposée est donné dans la figure(II.6)

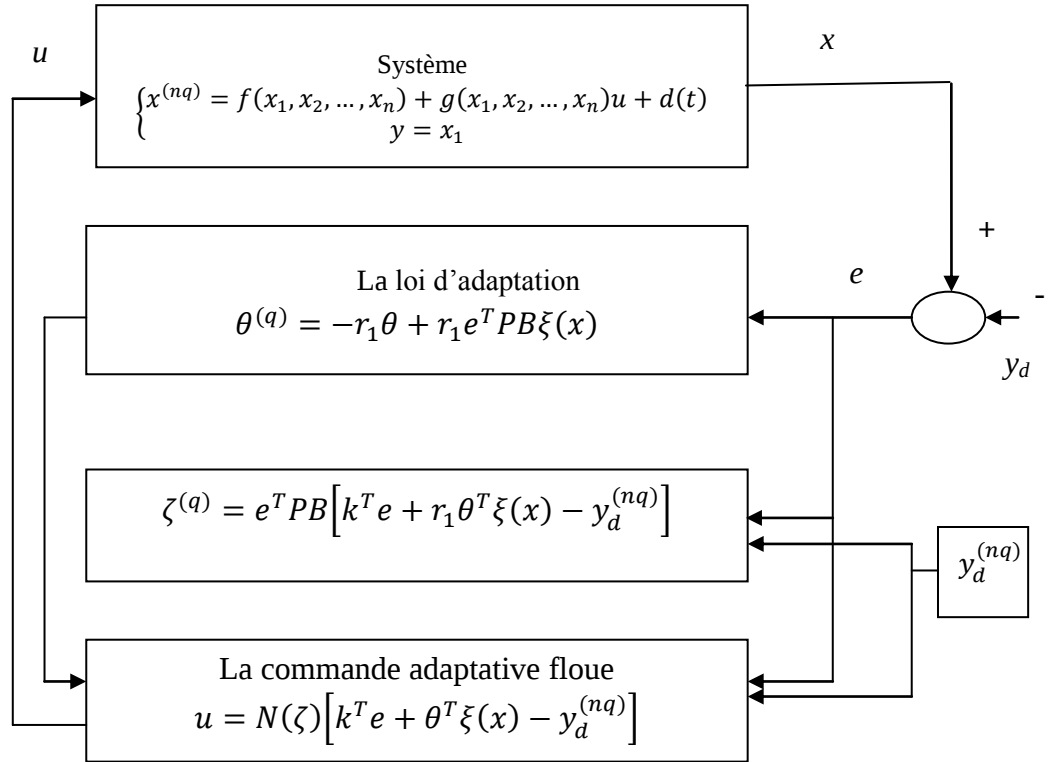


Fig. II.8 : Schéma général de commande adaptative floue avec signe de gain de commande inconnu.

II.3.3. Résultats de simulation

A). Exemple-1

Pour illustrer les performances de cette approche de commande proposée, on considère deux systèmes chaotiques d'ordre fractionnaire de *Duffing* comme suit, [18]

Le premier est un système de référence

$$D^q y_1 = y_2$$

$$D^q y_2 = y_1 - 0.25y_2 - y_1^3 + 0.3 \cos(t)$$

Le second est le système réponse (de commande)

$$D^q x_1 = x_2$$

$$D^q x_2 = x_1 - 0.3x_2 - x_1^3 + 0.35 \cos(t) + u(t) + d(t)$$

Les conditions initiales sont choisies comme suit $\underline{y}(0) = [0, 0]^T$ et $\underline{x}(0) = [0.2, -0.2]^T$ respectivement. On considère $q = 0.95$ et la perturbation externe comme $d(t) = 0.1\sin(t)$.

Pour les autres constantes de conception sont fixées comme suit $k_1 = k_2 = 1$, $r_1 = 0.05$, $h = 0.01$ et $Tsim = 40s$.

L'objectif principal est de commander notre système de réponse pour suivre le système de référence.

La figure (II.9) illustre le plan de phase des systèmes sans la loi de commande étudiée.

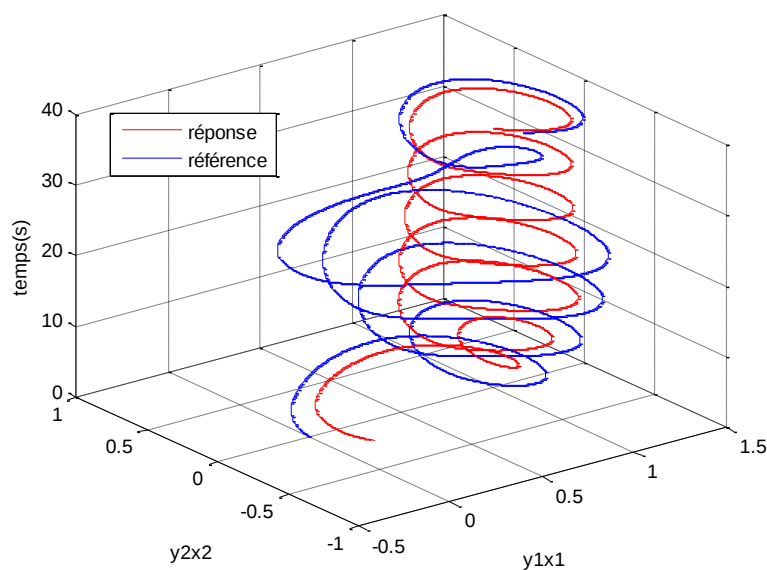


Fig. II.9 : Plan de phase des systèmes sans la loi de commande.

La figure (II.10) illustre la synchronisation des systèmes avec la commande étudiée.

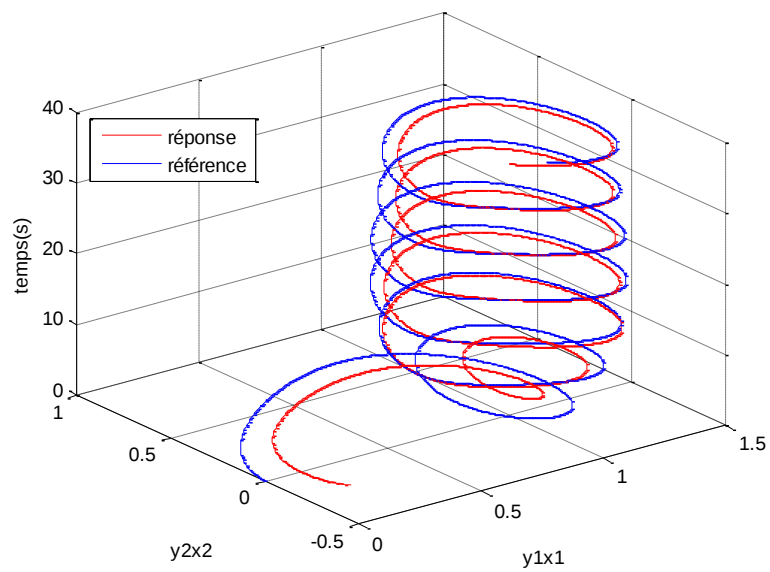
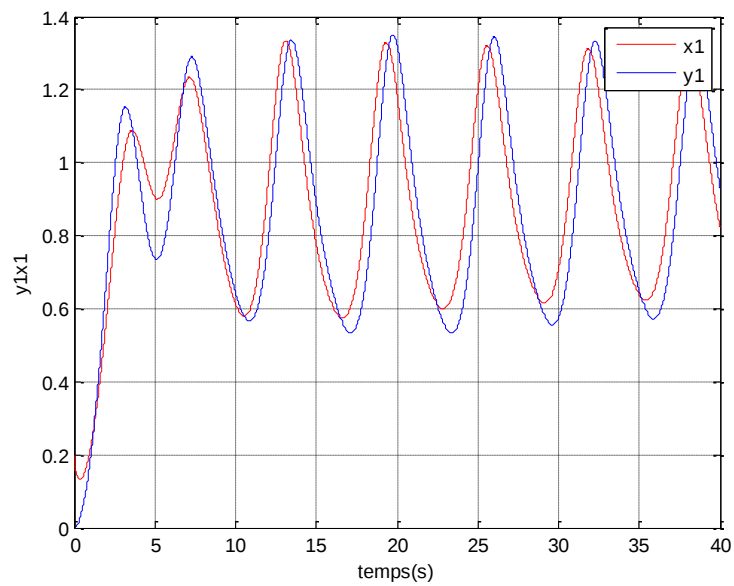
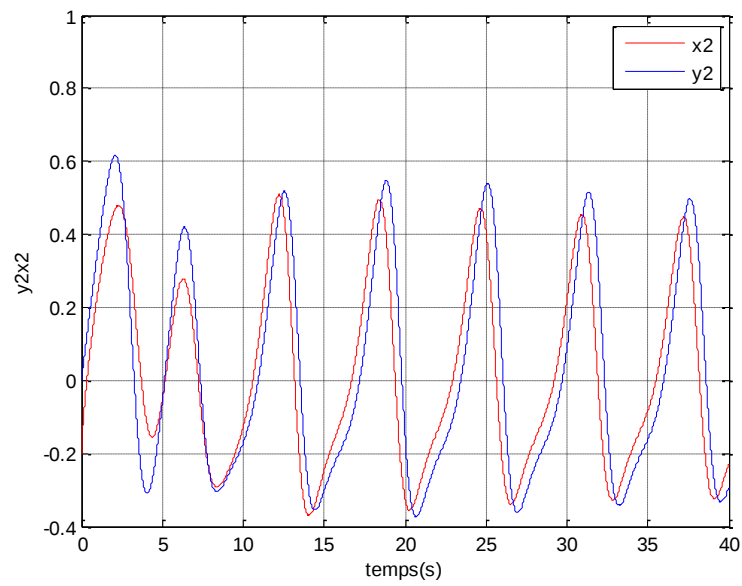


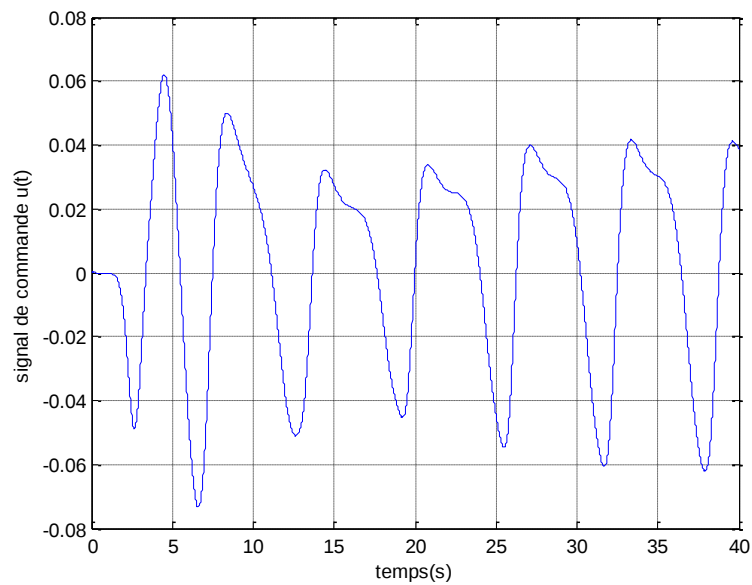
Fig. II.10 : Synchronisation des systèmes avec la loi de commande.



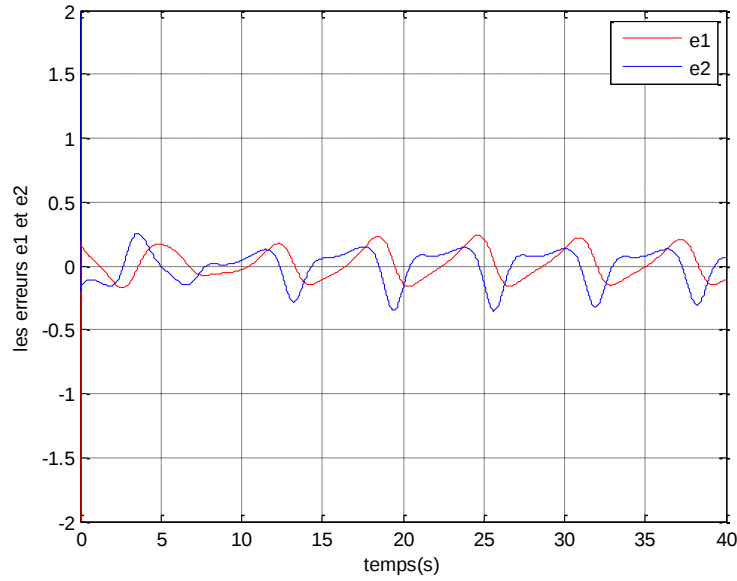
(a). Trajectoires des états y_1 et x_1 .



(b). Trajectoires des états y_2 et x_2 .



(c). Signal de la commande $u(t)$.



(d). Les erreurs e1 et e2.

Fig. II.11 : Résultats de simulation avec la loi de commande étudiée.

B). Exemple.2

Pour illustrer les performances de cette approche de commande proposée, on considère deux systèmes chaotiques d'ordre fractionnaire de *Duffing* comme suit, [19]
Le premier est un système de référence

$$D^q y_1 = y_2$$

$$D^q y_2 = 1.2y_1 - y_2 - y_1^2 + 0.5 \cos(t)$$

Le second est le système réponse (de commande)

$$D^q x_1 = x_2$$

$$D^q x_2 = x_1 - 1.8x_2 - x_1^2 + 0.9 \cos(t) + u(t) + d(t)$$

Les conditions initiales sont choisies comme suit $\underline{y}(0) = [0, 0]^T$ et $\underline{x}(0) = [1, -1]^T$ respectivement. On considère dans ce cas l'ordre fractionnaire $q = 0.98$, où la perturbation externe $d(t) = 0.1 \sin(t)$. Pour les autres constantes de conception sont fixées comme suit $k_1 = k_2 = 1$, $r_1 = 200$, $\rho = 0.05$, $h = 0.01$ et $Tsim = 40s$.

L'objectif principal est de commander notre système de réponse pour suivre le système de référence. Avec les fonctions $f(x, t)$ et $g(x, t)$ sont totalement inconnues.

La figure (II.12) illustre le plan de phase des systèmes sans la commande étudiée.

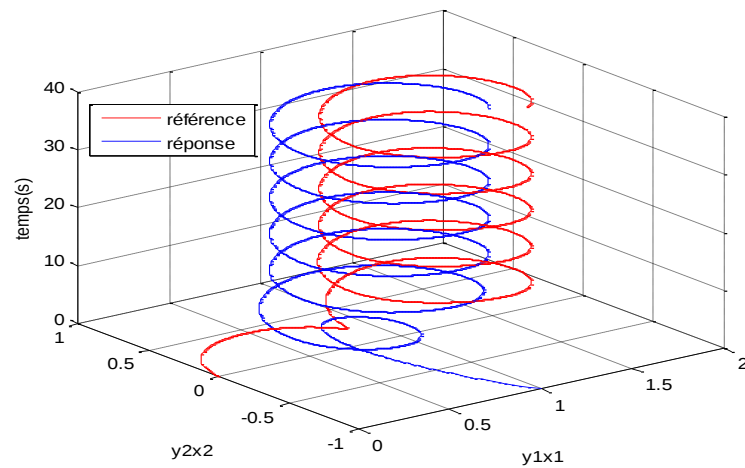


Fig. II.12 : Plan de phase des systèmes sans la commande étudiée.

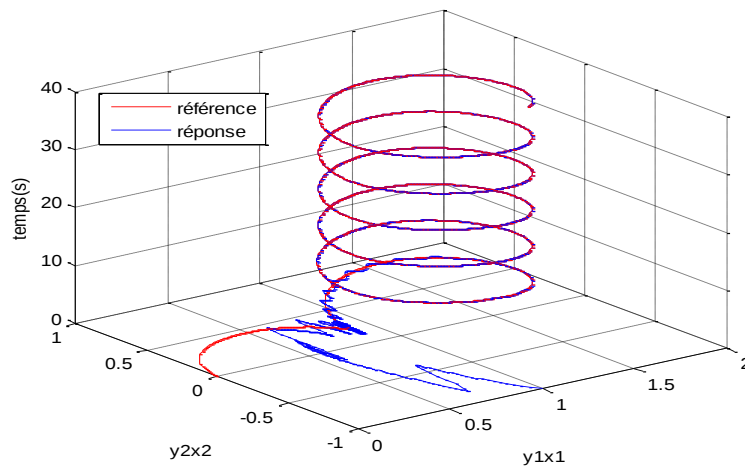
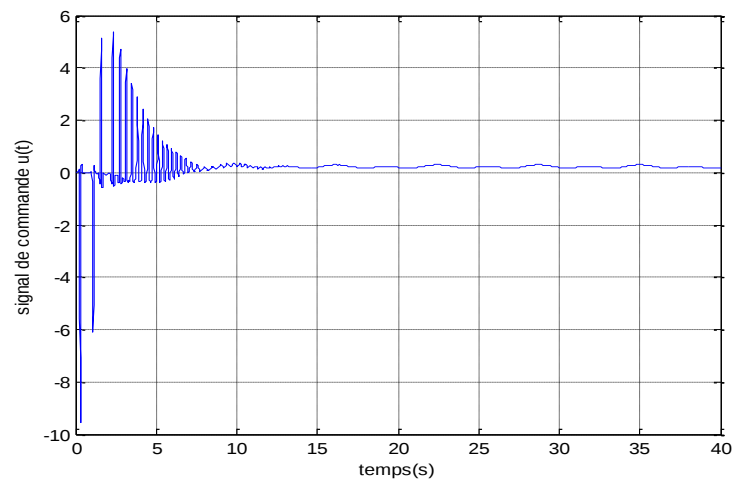
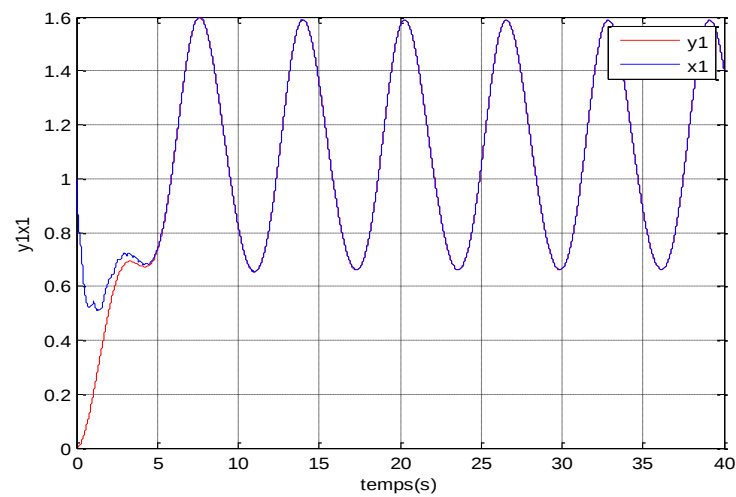


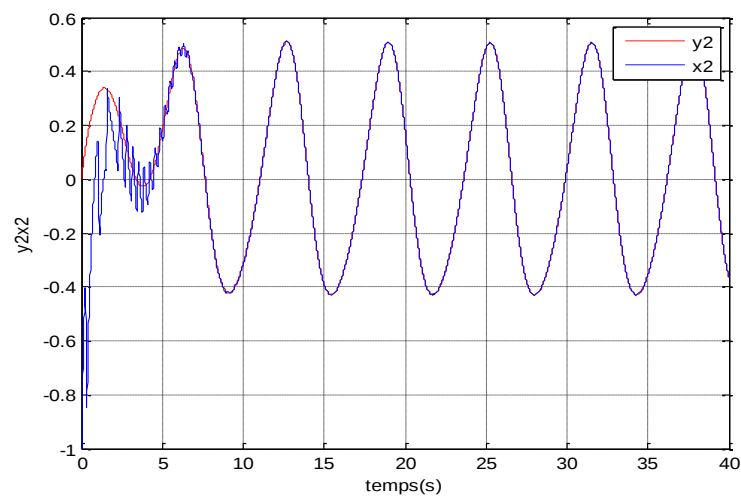
Fig. II.13 : Synchronisation des systèmes avec la commande étudiée.



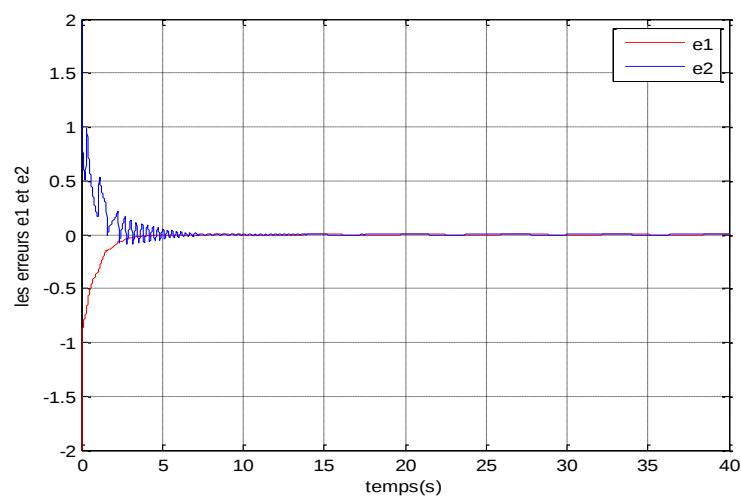
(a). Signal de la commande $u(t)$.



(b). Trajectoires des états y_1 et x_1 .



(c). Trajectoires des états y_2 et x_2 .



(d). Erreurs $e_1(t)$ et $e_2(t)$.

Fig. II.14 : Résultats de simulation avec la loi de commande étudiée.

Commentaires

- L'erreur est bornée et converge asymptotiquement vers zéros.
- D'après les figures II.11 et II.14 (les erreurs), les trajectoires des réponses convergent vers les trajectoires des références avec précision, même en présence des perturbations externes.
- Les paramètres adaptés et la fonction de Nussbaum qui estime le signe de gain de commande sont bornés.

II.4. Conclusion

Dans ce chapitre, deux lois de commande adaptative floue sont étudiées pour une classe des systèmes SISO non linéaires d'ordre fractionnaire. Dans le premier schéma, une loi de commande adaptative, avec ses lois d'adaptation paramétrique, ce schéma utilise un algorithme de projection, ce dernier permet de forcer les paramètres estimés à rester dans une région prédéfinie par l'utilisateur.

Cependant, en pratique, la détermination de telle région n'est pas une tâche facile. Notons que, la direction de commande dans ce schéma est supposée connue, cette hypothèse n'est pas réaliste dans le cas général. Pour pallier à ces problèmes et réduire le nombre de paramètres de conception, le second schéma est proposé, où la technique de Nussbaum d'ordre fractionnaire a été utilisée pour estimer le signe de gain de commande. Les commandes développées garantissent la bornitude de tous les signaux de la boucle fermée et la convergence de l'erreur de poursuite. Les résultats de la simulation pour une classe de systèmes chaotiques fractionnaires montrent les performances de poursuite de ces méthodes.